

**PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY  
Z NOWĄ ERA 2017/2018**

**MATEMATYKA  
POZIOM PODSTAWOWY**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ**

### Zadania zamknięte

Punkt przyznaje się za wskazanie poprawnej odpowiedzi.

#### Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odpowiedź
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1.7. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia.	B

#### Zadanie 2. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1.3. Liczby rzeczywiste. Zdający posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach. 2.1. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ .	A
--	--	---

#### Zadanie 3. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1.4. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.	D
--	---	---

#### Zadanie 4. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1.6. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.	C
--	---	---

#### Zadanie 5. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	1.9. Liczby rzeczywiste. Zdający wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok)	A
--------------------------------	--	---

**Zadanie 6. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2.1. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ . 3. Równania i nierówności. Zdający: 1) sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności; 3) rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.	<b>D</b>
--	---	----------

**Zadanie 7. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający: 6) korzysta z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu $x^3 = -8$ ; 7) korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7) = 0$ .	<b>B</b>
--	---	----------

**Zadanie 8. (0–1)**

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	4. Funkcje. Zdający: 2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu [...]; 6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie.	<b>B</b>
--	--	----------

**Zadanie 9. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4.3. Funkcje. Zdający odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą).	<b>C</b>
--	--	----------

**Zadanie 10. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający: 2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. Posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość; 9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.	<b>A</b>
--	--	----------

**Zadanie 11. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4.10. Funkcje. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje).	C
--	---	---

**Zadanie 12. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	5.2. Ciągi. Zdający bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny.	A
--	--	---

**Zadanie 13. (0–1)**

III. Modelowanie matematyczne.	5.4. Ciągi. Zdający stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.	C
--------------------------------	---	---

**Zadanie 14. (0–1)**

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	6.1. Trygonometria. Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od $0^\circ$ do $180^\circ$ .	B
--	--	---

**Zadanie 15. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6.3. Trygonometria. Zdający oblicza miarę kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo – korzystając z tablic lub kalkulatora – przybliżoną).	D
--	---	---

**Zadanie 16. (0–1)**

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7.4. Planimetria. Zdający korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi. 8.6. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza odległość dwóch punktów.	A
-----------------------------------	---	---

**Zadanie 17. (0–1)**

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7.1. Planimetria. Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.	<b>C</b>
-----------------------------------	--	----------

**Zadanie 18. (0–1)**

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7.2. Planimetria. Zdający korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych.	<b>B</b>
-----------------------------------	---	----------

**Zadanie 19. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8.4. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie.	<b>C</b>
--	--	----------

**Zadanie 20. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8.2. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostokątłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych	<b>C</b>
--	---	----------

**Zadanie 21. (0–1)**

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	GIMNAZJUM 11.2. Bryły. Zdający oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli.	<b>B</b>
--	--	----------

**Zadanie 22. (0–1)**

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	9. Stereometria. Zdający: 4) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami; 5) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostokątnościannu płaszczyzną.	<b>D</b>
--	--	----------

**Zadanie 23. (0–1)**

III. Modelowanie matematyczne.	GIMNAZJUM 11.2. Bryły. Zdający oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym).	<b>D</b>
--------------------------------	--	----------

**Zadanie 24. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10.3. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.	<b>D</b>
--	--	----------

**Zadanie 25. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10.1. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych. GIMNAZJUM 9.1. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Zdający interpretuje dane przedstawione za pomocą tabel, diagramów słupkowych i kołowych, wykresów.	<b>B</b>
--	---	----------

## Ogólne zasady oceniania zadań otwartych

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

### Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność:  $x(x - 4) \leq (2x + 1)(x - 4)$ .

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3.5. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.

### Przykładowe rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów. Pierwszy polega na ustaleniu pierwiastków trójmianu kwadratowego, drugi – na ustaleniu zbioru rozwiązań nierówności.

### Realizacja pierwszego etapu

#### Sposób I

Przenosimy składniki na jedną stronę nierówności

$$(2x + 1)(x - 4) - x(x - 4) \geq 0$$

i wyłączamy wspólny czynnik poza nawias, zapisując nierówność w postaci iloczynowej.

$$(x - 4)(2x + 1 - x) \geq 0$$

$$(x - 4)(x + 1) \geq 0$$

Pierwiastkami trójmianu kwadratowego  $(x - 4)(x + 1)$  są liczby  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 4$ .

#### Sposób II

Wymnażamy obie strony nierówności:

$$x^2 - 4x \leq 2x^2 - 8x + x - 4$$

i redukujemy wyrazy podobne, zapisując nierówność w postaci równoważnej:

$$x^2 - 3x - 4 \geq 0$$

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego  $x^2 - 3x - 4$ .

- Obliczamy wyróżnik tego trójmianu kwadratowego:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25, \text{ stąd } x_1 = \frac{3-5}{2} = -1, x_2 = \frac{3+5}{2} = 4$$

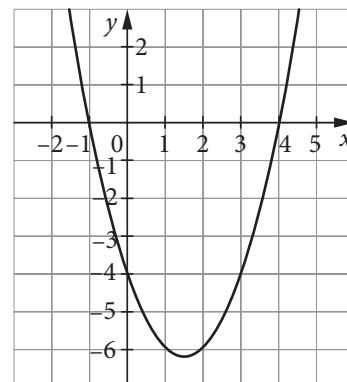
albo

- stosujemy wzory Viète'a:

$$x_1 \cdot x_2 = -4 \text{ oraz } x_1 + x_2 = 3, \text{ stąd } x_1 = -1 \text{ oraz } x_2 = 4,$$

albo

- podajemy je bezpośrednio, zapisując pierwiastki trójmianu  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 4$  (podajemy uzasadnienie, np.  $f(-1) = f(4) = 0$ ) lub zaznaczając je na wykresie.



### Realizacja drugiego etapu

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności:  $x \leq -1$  lub  $x \geq 4$ .

Alternatywnie:  $x \in (-\infty, -1) \cup (4, \infty)$ .

### Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ..... **1 pkt**

gdy:

- prawidłowo wyznaczy pierwiastki trójmianu kwadratowego:  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 4$  i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- realizując pierwszy etap, popełni błąd, ale otrzyma dwa różne pierwiastki i konsekwentnie rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje ..... **2 pkt**

gdy:

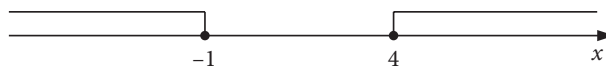
- poda zbiór rozwiązań nierówności:  $x \in (-\infty, -1) \cup (4, \infty)$  albo w postaci:  $x \leq -1$  lub  $x \geq 4$

albo

- sporządzi poprawną ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci:  $x \leq -1$  lub  $x \geq 4$ ,

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.



### Uwagi

1. Jeżeli zdający podzieli obie strony nierówności przez  $x - 4$  bez stosownego założenia lub rozważy tylko jedno założenie:  $x > 4$  albo  $x < 4$ , to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający podzieli obie strony nierówności przez  $x - 4$  i rozważy jedno z założeń:  $x > 4$ ,  $x < 4$  oraz sprawdzi warunek  $x = 4$ , rozwiąże nierówność w każdym z dwóch przypadków oraz konsekwentnie wyznaczy zbiór rozwiązań nierówności, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający podzieli obie strony nierówności przez  $x - 4$  i rozważy dwa założenia:  $x > 4$ ,  $x < 4$  oraz sprawdzi warunek  $x = 4$ , rozwiąże nierówność w każdym z trzech przypadków i poprawnie wyznaczy zbiór rozwiązań nierówności, to otrzymuje **2 punkty**.

### Zadanie 27. (0–2)

Ciąg  $(a_n)$  jest określony wzorem  $a_n = \frac{4n + 5}{2n + 1}$  dla  $n \geq 1$ . Sprawdź, czy istnieje wyraz tego ciągu równy  $2\frac{1}{2}$ .

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	3.8. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych. 5.1. Ciągi. Zdający wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.



## Przykładowe rozwiązania

### Sposób I

Ciąg  $(a_n)$  ma wyraz  $a_n = 2\frac{1}{2}$  wtedy, gdy rozwiązaniem równania  $\frac{4n+5}{2n+1} = 2\frac{1}{2}$  jest liczba naturalna dodatnia.

$$\frac{4n+5}{2n+1} = \frac{5}{2}$$

$$10n+5 = 8n+10$$

$$n = \frac{5}{2}$$

Liczba  $n = \frac{5}{2}$  nie jest liczbą naturalną, więc w tym ciągu nie istnieje wyraz równy  $2\frac{1}{2}$ .

### Sposób II

Obliczamy kolejne wyrazy ciągu  $(a_n)$ :  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5} > 2\frac{1}{2}$ ,  $a_3 = \frac{17}{7} = 2\frac{3}{7} < 2\frac{1}{2}$ . Wystarczy zatem uzasadnić, że ciąg  $(a_n)$  jest malejący.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{4(n+1)+5}{2(n+1)+1} - \frac{4n+5}{2n+1} = \frac{(4n+9)(2n+1) - (4n+5)(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}$$

Mnożymy wyrażenia w nawiasach, redukujemy wyrazy podobne i ostatecznie otrzymujemy

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-6}{(2n+3)(2n+1)} < 0 \text{ dla } n \in N_+, \text{ więc ciąg } (a_n) \text{ jest malejący:}$$

Ciąg  $(a_n)$  jest malejący,  $a_2 = 2\frac{3}{5} > 2\frac{1}{2}$ , a  $a_3 = 2\frac{3}{7} < 2\frac{1}{2}$ , więc w tym ciągu nie istnieje wyraz równy  $2\frac{1}{2}$ .

### Sposób III

Wzór na wyraz ciągu można przekształcić w następujący sposób:

$$a_n = \frac{4n+5}{2n+1} = \frac{(4n+2)+3}{2n+1} = \frac{2(2n+1)+3}{2n+1} = 2 + \frac{3}{2n+1}.$$

Z powyższego zapisu widać, że ciąg  $(a_n)$  jest ciągiem malejącym. I dalej jak wyżej.

## Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ..... 1 pkt

gdy:

- poprawnie wyznaczy rozwiązanie równania wymiernego:  $n = \frac{5}{2}$

albo

- uzasadni, że ciąg  $(a_n)$  jest malejący.

Zdający otrzymuje ..... 2 pkt

gdy poprawnie uzasadni, że w ciągu  $(a_n)$  nie istnieje wyraz równy  $2\frac{1}{2}$ .

## Uwagi

1. Jeżeli zdający jedynie wyznaczy wyrazy  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 2\frac{3}{5} > 2\frac{1}{2}$ ,  $a_3 = 2\frac{3}{7} < 2\frac{1}{2}$  i stąd wywnioskuje, że w ciągu  $(a_n)$  nie istnieje wyraz równy  $2\frac{1}{2}$ , to otrzymuje **0 punktów**.

2. Jeżeli zdający wyznaczy wyrazy  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 2\frac{3}{5} > 2\frac{1}{2}$ ,  $a_3 = 2\frac{3}{7} < 2\frac{1}{2}$  i badając monotoniczność ciągu popełni błędy rachunkowe, ale przeprowadzi poprawne rozumowanie prowadzące do wniosku, że wyraz równy  $2\frac{1}{2}$  nie istnieje, to otrzymuje **1 punkt**.

**Zadanie 28. (0–2)**

Udowodnij, że nierówność  $(x^2 - 3)^2 + x^4 \geq 4\frac{1}{2}$  jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej.

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	2.1. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ .

**Przykładowe rozwiązanie**

**Sposób I**

Niech  $x$  będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Chcemy wykazać, że  $(x^2 - 3)^2 + x^4 \geq 4\frac{1}{2}$ .  
 Przekształcamy tezę do postaci równoważnej.

$$x^4 - 6x^2 + 9 + x^4 - \frac{9}{2} \geq 0$$

$$2x^4 - 6x^2 + \frac{9}{2} \geq 0$$

$$4x^4 - 12x^2 + 9 \geq 0$$

$$(2x^2 - 3)^2 \geq 0$$

Otrzymana nierówność jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x$ , bo kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny. Zatem równoważna jej teza też jest prawdziwa. To kończy dowód.

**Sposób II**

Do tezy podstawiamy  $t = x^2$  i otrzymujemy nierówność kwadratową

$$(t - 3)^2 + t^2 \geq 4\frac{1}{2}$$

$$4t^2 - 12t + 9 \geq 0$$

Trójmian kwadratowy  $4t^2 - 12t + 9$  najmniejszą wartość przyjmuje dla  $t = -\frac{b}{2a}$  ( $a > 0$ ).

Dla  $t = -\frac{-12}{8} = 1,5$  wartość trójmianu wynosi 0.

Ponieważ najmniejsza wartość trójmianu wynosi 0, zatem nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ , a tym samym jest prawdziwa teza twierdzenia.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje** ..... **1 pkt**

- gdy zapisze nierówność w postaci równoważnej  $(2x^2 - 3)^2 \geq 0$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- zapisze nierówność jako nierówność kwadratową (po podstawieniu  $t = x^2$ ) i obliczy wyróżnik trójmianu kwadratowego lub poda współrzędne wierzchołka paraboli.

**Zdający otrzymuje** ..... **2 pkt**

gdy przeprowadzi pełny dowód.

**Zadanie 29. (0–2)**

Dla pewnej liczby rzeczywistej  $x$  liczby  $1 - x$ ,  $2 - 3x$ ,  $10 + 2x$  są trzema początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu arytmetycznego  $(a_n)$ , określonego dla  $n \geq 1$ . Wyznacz  $x$  oraz oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	5.3. Ciągi. Zdający stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

**Przykładowe rozwiązanie**

Korzystamy z zależności między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego i zapisujemy równanie.

$$\frac{1 - x + 10 + 2x}{2} = 2 - 3x$$
$$x + 11 = 4 - 6x$$
$$x = -1$$

Stąd  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 5$ ,  $a_3 = 8$ , ... . Różnica tego ciągu  $r = 3$ .

Możemy skorzystać ze wzoru na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

$$S_{10} = 2 + 5 + 8 + \dots + a_{10} = \frac{2 \cdot 2 + 9 \cdot 3}{2} \cdot 10 = 155$$

**Schemat oceniania**

Zdający otrzymuje ..... **1 pkt**

- gdy obliczy pierwszy wyraz ciągu:  $a_1 = 2$  oraz jego różnicę:  $r = 3$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

albo

- wyznaczy wyraz pierwszy oraz różnicę z błędem rachunkowym i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy sumę dziesięciu początkowych wyrazów otrzymanego ciągu.

Zdający otrzymuje ..... **2 pkt**

gdy obliczy sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu:  $S_{10} = 155$ .

**Uwaga**

Jeżeli zdający stosuje własności ciągu geometrycznego zamiast własności ciągu arytmetycznego, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

**Zadanie 30. (0–2)**

Osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej  $f(x) = ax^2 + bx + 3$ , gdzie  $a \neq 0$ , jest prosta o równaniu  $x = -2$ . Wierzchołek paraboli leży na prostej o równaniu  $y = -x + 2$ . Wyznacz wzór funkcji  $f$  w postaci ogólnej bądź kanonicznej.

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający: 9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie; 10) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje).

**Przykładowe rozwiązania**

Prosta o równaniu  $x = -2$  jest osią symetrii paraboli, więc pierwszą współrzędną jej wierzchołka  $W(p, q)$  jest  $p = -2$ . Wierzchołek paraboli leży na prostej o równaniu  $y = -x + 2$ , więc drugą współrzędną wierzchołka jest  $q = 2 + 2 = 4$ . Stąd wierzchołkiem paraboli jest punkt  $W = (-2, 4)$ . Szukamy wzoru funkcji kwadratowej w postaci ogólnej:

$$f(x) = ax^2 + bx + 3$$

bądź w postaci kanonicznej:

$$f(x) = a(x + 2)^2 + 4$$

**Sposób I**

Zauważmy, że  $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + 3 = 3$ , więc do paraboli należy punkt  $P = (0, 3)$ . Wstawiamy współrzędne punktu  $P$  do wzoru funkcji  $f$ .

$$3 = a(0 + 2)^2 + 4$$

$$4a = -1$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

Wzór funkcji w postaci kanonicznej ma postać:

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x + 2)^2 + 4.$$

**Sposób II**

Tworzymy układ równań.

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = -2 \\ f(-2) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 4a \\ a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + 3 = 4 \end{cases}$$

Stąd:

$$4a - 8a = 1$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

$$b = 4a,$$

$$b = -1.$$

Zatem

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3.$$

### Sposób III

Tworzymy układ równań.

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = -2 \\ \frac{-\Delta}{4a} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 4a \\ \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = 4 \end{cases}$$

Stąd po podstawieniu otrzymujemy równanie:

$$\frac{-16a^2 + 12a}{4a} = 4$$

$$\frac{4a(-4a + 3)}{4a} = 4$$

$$-4a + 3 = 4$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

$$b = 4a,$$

$$b = -1.$$

Zatem

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3.$$

### Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ..... 1 pkt

gdy wyznaczy współrzędne wierzchołka paraboli  $p = -2$ ,  $q = 4$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ..... 2 pkt

gdy zapisze wzór funkcji w postaci kanonicznej  $f(x) = \frac{1}{4}(x + 2)^2 + 4$  lub ogólnej  $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3$ .

### Zadanie 31. (0–3)

Na ściankach symetrycznej dwunastościennej kostki do gry zapisano liczby 1, 2, 3, ..., 12 (jak na rysunku). Rzucamy tą kostką trzy razy i zapisujemy wyrzucone liczby w kolejności otrzymywania, tworząc ciąg trójwyrazowy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że utworzymy w ten sposób ciąg geometryczny o ilorazie całkowitym.

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne	10.3. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

### Przykładowe rozwiązanie

Zdarzeniem elementarnym jest każdy trójwyrazowy ciąg o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, 12\}$ . Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. Mamy więc do czynienia z modelem klasycznym. Z reguły mnożenia wynika, że liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa  $|\Omega| = 12^3 = 1728$ .

Niech  $A$  oznacza zdarzenie polegające na tym, że otrzymamy ciąg geometryczny o ilorazie całkowitym. Zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$  pogrupujemy w zależności od ilorazu ciągu geometrycznego.

Iloraz ciągu	Ciągi	Liczba ciągów
$q = 1$	(1, 1, 1), (2, 2, 2), ..., (12, 12, 12)	12
$q = 2$	(1, 2, 4), (2, 4, 8), (3, 6, 12)	3
$q = 3$	(1, 3, 9)	1

Stąd liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$ :  $|A| = 16$ .

Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest zatem równe  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{16}{12 \cdot 12 \cdot 12} = \frac{1}{108}$ .

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego**

**rozwiązania** ..... 1 pkt

Zdający:

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = 12^3 = 1728$

albo

- wypisze zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$ : (1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5), (6, 6, 6), (7, 7, 7), (8, 8, 8), (9, 9, 9), (10, 10, 10), (11, 11, 11), (12, 12, 12), (1, 2, 4), (2, 4, 8), (3, 6, 12) (1, 3, 9)

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 2 pkt

Zdający obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = 12^3 = 1728$  oraz zapisze, że  $|A| = 16$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne** ..... 3 pkt

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  i poda wynik w postaci ułamka nieskracalnego:

$$P(A) = \frac{1}{108}.$$

### Uwaga

Jeżeli zdający poprawnie wyznaczy moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych, ale przy wyznaczaniu liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniu  $A$  pominie jedno zdarzenie elementarne lub popełni błąd przy zliczaniu poprawnie wypisanych zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$  i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **2 punkty**.

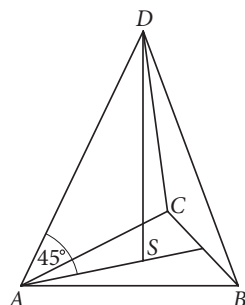
**Zadanie 32. (0–3)**

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym o wysokości  $2\sqrt{3}$  krawędź boczna tworzy z podstawą kąt  $45^\circ$ . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	9.2. Stereometria. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów. GIMNAZJUM 11.2. Bryły. Zdający oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli.

**Przykładowe rozwiązania**

Wprowadzamy oznaczenia na rysunku.



Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny  $ABC$ , punkt  $S$  jest spodkiem wysokości tego ostrosłupa. Kąt między krawędzią boczną i płaszczyzną podstawy jest równy  $45^\circ$ , zatem możemy zauważyć, że trójkąty prostokątne  $SBD$ ,  $SAD$ ,  $SCD$  są równoramienne. Można też skorzystać z własności funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym i obliczyć długość odcinków  $AS = BS = CS$ .

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}45^\circ &= \frac{2\sqrt{3}}{x} \\ 1 &= \frac{2\sqrt{3}}{x}\end{aligned}$$

$$AS = BS = CS = 2\sqrt{3}$$

Aby obliczyć pole podstawy, potrzebna jest długość boku trójkąta lub wysokość trójkąta  $ABC$ . Wiadomo, że  $AS$  to  $\frac{2}{3}$  wysokości trójkąta  $ABC$ . Obliczamy wysokość trójkąta  $ABC$ .

$$\frac{2}{3}h = 2\sqrt{3}$$

$$h = 3\sqrt{3}$$

Wyznamy długość krawędzi podstawy ostrosłupa  $ABCD$ , korzystając ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego  $ABC$ .

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$3\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$a = 6$$

Obliczamy pole podstawy ostrosłupa. Korzystamy ze wzoru na pole trójkąta równobocznego.

$$P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$P = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

Na koniec obliczamy objętość ostrosłupa.

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 18$$

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ..... 1 pkt

Zdający obliczy długość odcinka AS lub BS lub CS i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 2 pkt

Zdający obliczy wysokość podstawy ostrosłupa ( $3\sqrt{3}$ ) oraz długość boku tej podstawy (6).

**Rozwiązanie pełne** ..... 3 pkt

Zdający obliczy objętość ostrosłupa ABCD (18).

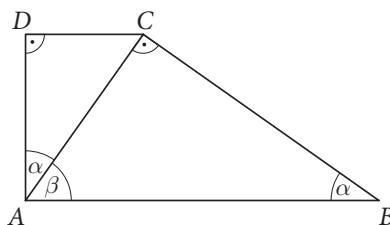
### Zadanie 33. (0–4)

W trapezie prostokątnym ABCD o podstawach AB i CD przekątna AC jest prostopadła do ramienia BC, dłuższa podstawa AB ma długość 9, a sinus kąta CAD jest równy  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . Oblicz pole tego trapezu.

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	7.4. Planimetria. Zdający korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych. GIMNAZJUM 10. Figury płaskie. Zdający: 7) stosuje twierdzenie Pitagorasa; 9) oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów.

### Przykładowe rozwiązanie

Wprowadzamy oznaczenia na rysunku.





Zauważmy, że  $\alpha = 90^\circ - \beta$ , więc  $\sin \alpha = \sin(90^\circ - \beta) = \cos \beta$ . Stąd w trójkącie  $ABC$ :

$$\cos \beta = \frac{|AC|}{|AB|}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{|AC|}{9}$$

$$|AC| = 3\sqrt{3}$$

Następnie w trójkącie  $ACD$ :

$$\sin \alpha = \frac{|CD|}{|AC|}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{|CD|}{3\sqrt{3}}$$

$$|CD| = 3$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie  $ACD$ :

$$|AD|^2 + 3^2 = (3\sqrt{3})^2$$

$$|AD| = 3\sqrt{2}$$

Pole trapezu  $ABCD$  wynosi więc:

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}(9 + 3) \cdot 3\sqrt{2} = 18\sqrt{2}.$$

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ..... 1 pkt

Zdający:

- zapisze, że  $\sin \alpha = \cos \beta$

albo

- zauważy, że trójkąty  $ABC$  i  $ACD$  są podobne, więc  $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CAD| = \alpha$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 pkt

Zdający obliczy długość przekątnej  $AC$ :  $|AC| = 3\sqrt{3}$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 pkt

Zdający wyznaczy długości przyprostokątnych w trójkącie  $ACD$ :  $|CD| = 3$ ,  $|AD| = 3\sqrt{2}$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne** ..... 4 pkt

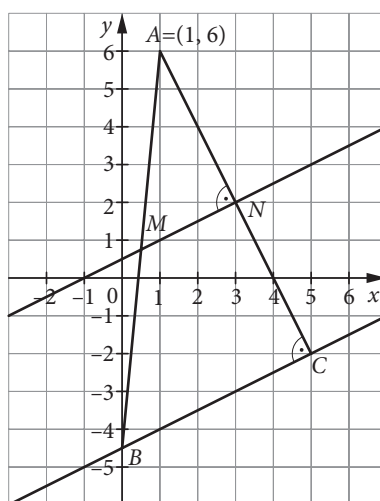
Zdający obliczy pole trapezu:  $P_{ABCD} = 18\sqrt{2}$ .

**Zadanie 34. (0–5)**

W trójkącie  $ABC$  wierzchołek  $A$  ma współrzędne  $(1, 6)$ , wierzchołek  $B$  leży na osi  $Oy$ , a  $|\sphericalangle ACB| = 90^\circ$ . Prosta o równaniu  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$  jest równoległa do boku  $BC$  i przecina każdy z boków  $AB$  i  $AC$  w połowie. Wyznacz współrzędne wierzchołków  $B$  i  $C$  tego trójkąta.

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający: 3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt; 4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych; 5) wyznacza współrzędne środka odcinka.

**Przykładowe rozwiązanie**



Punkty  $M$  i  $N$  są odpowiednio środkami odcinków  $AB$  oraz  $AC$ . Z warunku prostopadłości wyznaczamy równanie prostej  $AN$ :  $y = -2x + b$ . Podstawiając współrzędne punktu  $A = (1, 6)$  otrzymujemy równanie

$$6 = -2 \cdot 1 + b$$

$$b = 8$$

Zatem równanie prostej  $AN$  ma postać:  $y = -2x + 8$ .

Następnie obliczamy współrzędne punktu  $N$ . Jest to punkt wspólny prostych  $AN$  i  $MN$ , rozwiązujemy zatem układ równań:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y = -2x + 8 \end{cases}$$

Stosując metodę podstawiania, otrzymujemy równanie:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = -2x + 8$$

$$\frac{5}{2}x = \frac{15}{2}$$

$$x = 3$$

Wstawiamy wyznaczoną wartość  $x$  np. do pierwszego równania układu:

$$y = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} = 2.$$

Rozwiązaniem układu jest para liczb  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ , stąd punkt  $N = (3, 2)$ .

Korzystając ze wzoru na środek odcinka, wyznaczamy współrzędne wierzchołka  $C = (c_1, c_2)$ .

$$\begin{cases} \frac{c_1 + 1}{2} = 3 \\ \frac{c_2 + 6}{2} = 2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} c_1 = 5 \\ c_2 = -2 \end{cases}$$

Zatem  $C = (5, -2)$ .

Wierzchołek  $B$  trójkąta jest punktem przecięcia prostej  $BC$  z osią  $Oy$ , wystarczy zatem wyznaczyć jej równanie.

Proste  $MN$  i  $BC$  są równoległe, stąd równanie prostej  $BC$ :  $y = \frac{1}{2}x + b$ . Podstawiając współrzędne punktu  $C = (5, -2)$  otrzymujemy równanie:

$$-2 = \frac{5}{2} + b$$
$$b = -\frac{9}{2}$$

Zatem równanie prostej  $BC$  ma postać  $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$ . Wynika stąd, że  $B = (0, -4\frac{1}{2})$ .

Odpowiedź:  $B = (0, -4\frac{1}{2})$ ,  $C = (5, -2)$ .

#### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ..... 1 pkt

Zdający wyznaczy równanie prostej  $AN$ :  $y = -2x + 8$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 pkt

Zdający obliczy współrzędne punktu  $N = (3, 2)$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 pkt

Zdający wyznaczy współrzędne punktu  $C = (5, -2)$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania** ..... 4 pkt

Zdający zapisze równanie prostej  $BC$ :  $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$  i poprzestanie na tym lub rozwiąże zadanie do końca z błędami rachunkowymi (nawet na wcześniejszych etapach rozwiązania).

**Rozwiązanie pełne** ..... 5 pkt

Zdający obliczy współrzędne obu punktów:  $B = (0, -4\frac{1}{2})$ ,  $C = (5, -2)$ .